ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $5^{η}$ ΔΕΚΑΔΑ

41 .

Οι πλευρές ενός τριγώνου σε cm είναι $AB = 3x - 3$, $AΓ = 3x + 1$ και $BΓ = 4x$ και η περίμετρος Π του τριγώνου είναι $Π = 48$cm.

α) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.
β) Να δείξτε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.
δ) Να υπολογίσετε το ύψος στην υποτείνουσα.

Προτεινόμενη λύση

α)

$Π = 48$ άρα $AB + BΓ + AΓ = 48$ άρα $3x - 3 + 4x + 3x + 1 = 48$
$10x = 50$
$x = 5$ cm

Οπότε $AB = 12$cm , $AΓ = 16$ cm , $BΓ = 20$ cm

β)

$BΓ^2 = 20^2 = 400$ και $AB^2 + AΓ^2 = 12^2 + 16^2 =$
$= 144 + 256 = 400$

Άρα $BΓ^2 = AB^2 + AΓ^2$ επομένως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ.

γ)

$(ABΓ) = \frac{1}{2}AB \cdot AΓ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 \text{ cm}^2$

δ)

Αν ΑΔ είναι το ύψος στην υποτείνουσα ΒΓ, τότε $(ABΓ) = \frac{1}{2}BΓ \cdot AΔ$ άρα

$96 = \frac{1}{2} \cdot 20AΔ$
$96 = 10AΔ$
$AΔ = 96 : 10 = 9{,}6$ cm

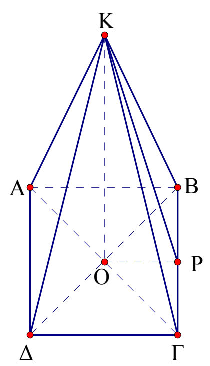
42 .

Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρη επιφάνεια με εμβαδόν $E_π = 240 \text{cm}^2$ και απόστημα 10cm.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά α της βάσης της πυραμίδας.
β) Αν η πλευρά της τετραγωνικής βάσης είναι $α = 12$ cm, να υπολογίσετε το ύψος της πυραμίδας.
γ) Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

Προτεινόμενη λύση

Το σχήμα του προβλήματος φαίνεται δίπλα



α)

Έστω α η πλευρά της βάσης.

$E_{\text{παράπλευρης}} = \frac{1}{2}(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{απόστημα})$

Άρα $240 = \frac{1}{2} \cdot 4α \cdot 10$ απ' όπου $α = 12$cm

β)
Έστω KO το ύψος της πυραμίδας.
Πυθαγόρειο στο τρίγωνο KOP : $KO^2 = KP^2 - OP^2 = 10^2 - 6^2 =$
$=100 - 36 = 64$

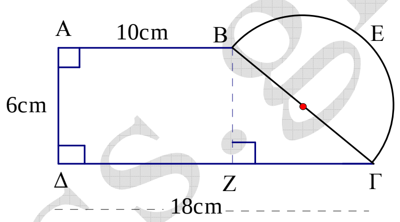
άρα $KO = \sqrt{64} = 8$ cm

γ)
$E_{βάσης} = α^2 = 12^2 = 144\ cm^2$ οπότε $E_{ολικό} = E_{παράπλευρο} + E_{βάσης} =$
$= 240 + 144 = 384\ cm^2$

$V = \frac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης)(ύψος) $= \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384\ cm^3$

43.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με $\widehat{A} = \widehat{Δ} = 90^o$, $AB = 10cm$, $AΔ = 6cm$ και $ΔΓ = 18cm$. Η ΒΓ είναι διάμετρος του ημικυκλίου ΒΕΓ .



α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της γραμμής ΑΒΕΓΔΑ
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΕΓΔΑ

Προτεινόμενη λύση

α)
Φέρνουμε το ύψος ΒΖ. Τότε το ΑΒΖΔ είναι ορθογώνιο, οπότε $ΔZ = AB = 10cm$ και $BZ = AΔ = 6cm$.
Τότε $ZΓ = ΔΓ - ΔZ = 18 - 10 = 8cm$
Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΖΓΒ: $BΓ^2 = BZ^2 + ZΓ^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

άρα $BΓ = \sqrt{100} = 10$ cm

Η περίμετρος Π του τραπεζίου είναι ίση με $Π = AB + BΓ + ΓΔ + ΔA =$
$= 10 + 10 + 18 + 6 =$
$= 44$ cm

β)
$$(ABΓΔ) = \frac{(AB + ΓΔ)BZ}{2} = \frac{(10+18)6}{2} = 84\ cm^2$$

γ)
Το ημικύκλιο ΒΕΓ έχει ακτίνα $ρ = \frac{BΓ}{2} = \frac{10}{2} = 5cm$

Άρα το μήκος του είναι $\ell = \frac{2πρ}{2} = πρ = 3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7$ cm

Το μήκος της γραμμής ΑΒΕΓΔΑ είναι : $10 + 15{,}7 + 18 + 6 = 49{,}7$ cm

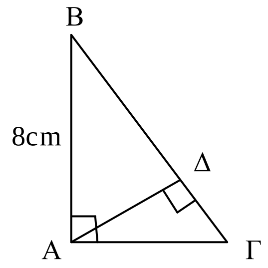
δ)
Το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι ίσο με $E' = \frac{πρ^2}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 25}{2} = 39{,}25\ cm^2$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του ημικυκλίου και του τραπεζίου, δηλαδή ίσο με : $84 + 39{,}25 = 123{,}25\ cm^2$

44.

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) είναι

εφΓ = $\frac{4}{3}$ και ΑΒ = 8cm . Να υπολογίσετε :



α) Την πλευρά ΑΓ
β) Τα ημΓ και συνΓ
γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
δ) Το ύψος ΑΔ στην υποτείνουσα ΒΓ

Προτεινόμενη λύση

α)

εφΓ = $\frac{AB}{A\Gamma}$ άρα $\frac{4}{3} = \frac{8}{A\Gamma}$

$4A\Gamma = 24$

$A\Gamma = 6cm$

β)

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΒΓ : $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

οπότε $B\Gamma = \sqrt{100} = 10$ cm

ημΓ = $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ και συνΓ = $\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

γ)

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24cm^2$

δ)

Αν ΑΔ είναι το ύψος στην υποτείνουσα ΒΓ, τότε ημΓ = $\frac{A\Delta}{A\Gamma}$

$\frac{4}{5} = \frac{A\Delta}{6}$

$5A\Delta = 24$

$A\Delta = 24:5 = 4,8$ cm

45.

Το 1^{ο} δεκαήμερο του Ιουνίου η μέγιστη θερμοκρασία που παρατηρήθηκε στην Πάτρα ήταν 18 , 17, 18 , 20 , 16 , 20 , 20 , 18 , 18 , 16

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Θερμοκρασία	Διαλογή	Συχνότητα	Σχ . % συχνότητα
Σύνολο			

β) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων και το κυκλικό διάγραμμα των σχετικών % συχνοτήτων

γ) Να βρείτε την μέση τιμή και την διάμεσο της κατανομής

Προτεινόμενη λύση

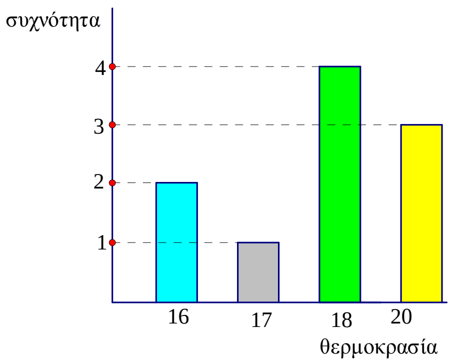
α)

Ο πίνακας συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω

Θερμοκρασία	Διαλογή	Συχνότητα	Σχ . % συχνότητα
16	||	2	20
17	|	1	10
18	||||	4	40
20	|||	3	30
Σύνολο		10	100

β)

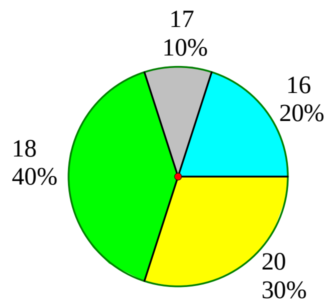
Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνεται δίπλα .



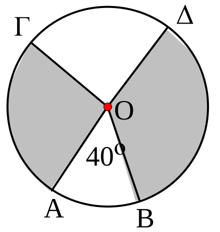
Στον παρακάτω πίνακα προσδιορίζουμε τις γωνίες του κυκλικού διαγράμματος

Τιμές	Γωνία
16	$\frac{2}{10}\cdot 360^{o} = 72^{o}$
17	$\frac{1}{10}\cdot 360^{o} = 36^{o}$
18	$\frac{4}{10}\cdot 360^{o} = 144^{o}$
20	$\frac{3}{10}\cdot 360^{o} = 108^{o}$
Σύνολο	360^{o}

Το κυκλικό διάγραμμα φαίνεται δίπλα



46.



Στον διπλανό σχήμα, η ακτίνα του κύκλου είναι 3 cm , $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = 40^{o}$ και ο κυκλικός τομέας ΓΟΔ έχει εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΑΟΒ.

α) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΑΟΒ

β) Να βρείτε την γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta$

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής

Προτεινόμενη λύση

α)

$$E = \frac{\pi\rho^2\mu}{360} = \frac{3{,}14\cdot 3^2\cdot 40}{360} = 3{,}14\ \text{cm}^2$$

β)

$E_{\text{κ.τ ΓΟΔ}} = 2\cdot 3{,}14 = 6{,}28\ \text{cm}^2$

Αν μ^{o} είναι η γωνία του, τότε $6{,}28 = \dfrac{3{,}14\cdot 3^2\cdot\mu}{360}$ άρα $6{,}28\cdot 360 = 3{,}14\cdot 9\mu$

απ’ όπου $\mu = 80^{o}$

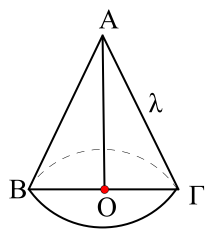
γ)

Το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής προκύπτει αν από το εμβαδόν του κύκλου αφαιρέσουμε το εμβαδόν των δύο κυκλικών τομέων ΑΟΒ και ΓΟΔ .

$E_{\text{κύκλου}} = 3{,}14\cdot 3^2 = 28{,}26$ οπότε

$E_{\text{ζητούμενο}} = 28{,}26 - 3{,}14 - 6{,}28 = 18{,}84\ \text{cm}^2$

47.



Στο διπλανό κώνο, η παράπλευρη επιφάνεια έχει εμβαδόν $E_{\pi} = 60\pi\ \text{cm}^2$ και η γενέτειρα λ έχει μήκος 10cm.

α) Να βρείτε την ακτίνα ρ της βάσης του κώνου.

β) Αν ρ = 6cm , να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

Προτεινόμενη λύση

α)

Από τον τύπο $E_{\pi} = \pi\cdot\rho\cdot\lambda$ και την υπόθεση έχουμε ότι $60\pi = \pi\cdot\rho\cdot 10$ άρα ρ = 6 cm

β)

$E_{\beta} = \pi\cdot 6^2 = 36\pi\ \text{cm}^2$ οπότε $E_{\text{ολικό}} = E_{\pi} + E_{\beta} = 60\pi + 36\pi = 96\pi\ \text{cm}^2$

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΟΓ : $\mathrm{AO}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 - \mathrm{O\Gamma}^2 =$

$= 10^2 - 6^2 =$

$= 100 - 36 = 64$

Άρα το ύψος ΑΟ του κώνου είναι $\mathrm{AO} = \sqrt{64} = 8$ cm

και επομένως ο όγκος V είναι ίσος με $V = \dfrac{1}{3}$(εμβαδόν βάσης)·(ύψος) =

$= \dfrac{1}{3}\cdot 36\pi\cdot 8 = 96\pi\ \text{cm}^3$

48.

Έστω η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = 2x - 4$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της (ε) με τους άξονες του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της παραπάνω ευθείας.

γ) Πως διαμορφώνεται η γραφική παράσταση αν $-1 \le x \le 4$;

δ) Να βρείτε το λ ώστε το σημείο $A(2\lambda - 1 , \lambda + 3)$ να ανήκει στην παραπάνω ευθεία.

ε) Να βρείτε τη εξίσωση μιας άλλης ευθείας (δ), η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο $M(2 , 5)$

Προτεινόμενη λύση

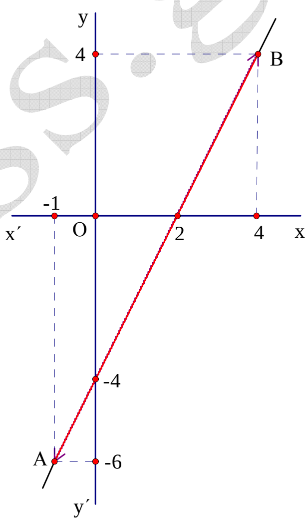
α)

Από την εξίσωση $y = 2x - 4$, για $x = 0$ έχουμε $y = -4$, επομένως το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των y είναι το $(0 , -4)$.

Επίσης για $y = 0$ έχουμε $x = 2$, επομένως το σημείο τομής με τον άξονα των x είναι το $(2 , 0)$.

β)

Η γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα



γ)

Αν $-1 \le x \le 4$ τότε η γραφική παράσταση είναι το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

δ)

Θα πρέπει να ισχύει $\lambda + 3 = 2(2\lambda - 1) - 4$

$\lambda + 3 = 4\lambda - 2 - 4$

$3\lambda = 9$ άρα $\lambda = 3$

ε)

Αν $y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία (δ),

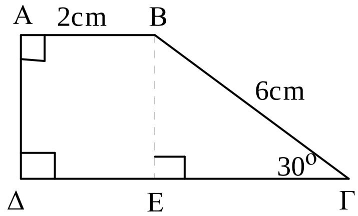
Τότε, λόγω της παραλληλίας των (ε) και (δ), είναι $\alpha = 2$.

Επομένως η εξίσωση της (δ) γίνεται $y = 2x + \beta$

Και επειδή διέρχεται από το σημείο (2, 5), είναι $5 = 2 \cdot 2 + \beta$ άρα $\beta = 1$.

Επομένως η εξίσωση της (δ) είναι η $y = 2x + 1$

49.



Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 2 cm, $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$ και ΒΓ = 6cm.
Ακόμα δίνεται ότι $\sqrt{3} = 1{,}73$
Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τραπεζίου.

Προτεινόμενη λύση

Φέρνουμε το ύψος ΒΕ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $\eta\mu\Gamma = \dfrac{BE}{B\Gamma}$ οπότε

$$\eta\mu 30^o = \frac{BE}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BE}{6}$$

ΒΕ = 3 cm και

Επίσης $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{E\Gamma}{B\Gamma}$ οπότε $\sigma\upsilon\nu 30^o = \dfrac{E\Gamma}{6}$

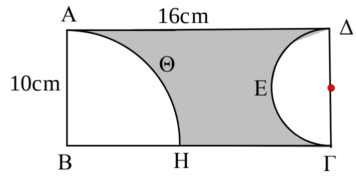
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{E\Gamma}{6}$$

$$E\Gamma = 3\sqrt{3} = 3 \cdot 1{,}73 = 5{,}19 \text{ cm}$$

Από το ορθογώνιο ΑΒΕΔ είναι ΔΕ = ΑΒ = 2 cm και ΑΔ = ΒΕ = 3cm
Μετά από αυτά ΔΓ = ΔΕ + ΕΓ = 2 + 5,19 = 7,19
Περίμετρος Π του τραπεζίου είναι Π = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ =
= 2 + 6 + 7,19 + 3 =
= 18,19 cm

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB + \Delta\Gamma)BE}{2} = \frac{(2 + 7{,}19)3}{2} = 13{,}785 \text{ cm}^2$$

50 .



Το διπλανό ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις ΑΒ = 10 cm και ΑΔ = 16cm.
Με κέντρο το Β και ακτίνα 10cm γράφουμε το τεταρτοκύκλιο ΑΘΗ στο εσωτερικό του ορθογωνίου και με διάμετρο την ΔΓ γράφουμε το ημικύκλιο ΔΕΓ στο εσωτερικό του ορθογωνίου
Να υπολογίσετε :

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου
β) Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την διαγώνιο ΑΓ του ορθογωνίου
γ) Το μήκος της γραμμής ΑΔΕΓΗΘΑ
δ) Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την γραμμή ΑΔΕΓΗΘΑ (γραμμοσκιασμένη)

Προτεινόμενη λύση

α)
$(ΑΒΓΔ) = 10 \cdot 16 = 160 cm^2$

β)
Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΒΓ : $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 =$
$= 10^2 + 16^2 =$
$=100 + 256 = 356$
Επομένως το τετράγωνο με πλευρά την ΑΓ έχει εμβαδόν $E = ΑΓ^2 = 356 cm^2$

γ)
Το μήκος ℓ του τόξου $\overset{\frown}{ΑΘΗ}$ είναι $\ell = \frac{2\pi\rho}{4} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10}{4} = 15{,}7 cm$

Το μήκος του ημικυκλίου $\overset{\frown}{ΔΕΓ}$ είναι $\ell' = \frac{2\pi\rho'}{2} = 3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7$ cm

ΗΓ = ΒΓ – ΒΗ = 16 – 10 = 6 cm
Επομένως το μήκος της γραμμής ΑΔΕΓΗΘΑ = 16 + 15,7 + 6 + 15,7 = 53,4 cm

δ)
Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από το εμβαδόν του ορθογωνίου αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου και το εμβαδόν του ημικυκλίου.

$E_{τεταρτοκυκλίου} = \frac{\pi\rho^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 10^2}{4} = 78{,}5 cm^2$

$E_{ημικυκλίου} = \frac{\pi\rho'^2}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 5^2}{2} = 39{,}25 cm^2$ οπότε

$E_{ζητούμενο} = 160 – 78{,}5 – 39{,}25 = 42{,}25 cm^2$